سامانه بانک تستی

FlowRax

ریاضی

Math

@Flow_KonKour

@LoPRax_KonKour

کلیک کن و با ما همراه شو!

۱

با توجه به شکل درمی‌یابیم:

$$\lim_{x\to ۰^-}[f(x)]+۲\lim_{x\to ۲^-}[f(x)]-۳\lim_{x\to ۲^+}[f(x)]=[۱^+]+۲[۱]-۳[۱^-]=۱+۲=۳$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲

می‌دانیم همواره $\cos x \geq -۱$ است. بنابراین:

$$۱+\cos x \geq ۰$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{۳-x}{۱+\cos x}=\frac{۳-\pi}{۰^+}=-\infty$$

بنابراین، نمودار گزینهٔ ۳ درست است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{x^۲+x-۲}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{x^۲+x-۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{x^۲+x-۲}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-x}{(x+۲)(x-۱)(x+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x(x-۱)}{(x+۲)(x-۱)(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to ۱}\frac{x}{(x+۲)(x+\sqrt{x})}=\frac{۱}{۶}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴

$$۲a+۲=a-۱\Rightarrow a=-۳\ ,\ -۲+۱=۲+b\Rightarrow b=-۵$$

$$\Rightarrow a\times b=۱۵$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x^۲+۳}-\sqrt{۳x+۱}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+۳-(۳x+۱)}{x-۱}\times\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۳}+\sqrt{۳x+۱}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۱}\times\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۳}+\sqrt{۳x+۱}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۱}\times\frac{۱}{۲+۲}=\frac{۱}{۴}\lim_{x\to ۱}(x-۲)=-\frac{۱}{۴}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

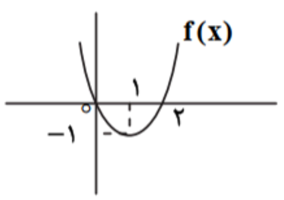
۶

راه‌حل اول: $\lim_{x\to ۱} f(x)=-۱$

با توجه به شکل تابع $f(x)$ در همسایگی $x_۰=۱$ کمی از (-۱) بزرگ‌تر است، پس:

$$\lim_{x\to ۱}[f(x)]=[(-۱)^+]=-۱$$

راه‌حل دوم: $\lim_{x\to ۱}[x^۲-۲x]=\lim_{x\to ۱}[(x-۱)^۲-۱]=[۰^+-۱]=[(-۱)^+]=-۱$



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۷ نکته: در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$، اگر $f(a) = g(a) = ۰$، نتیجه می‌گیریم که چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x-a)$ بخش‌پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x-a)$، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطهٔ a، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

صورت کسر را با اتحاد چاق و لاغر و مخرج آن را با دو بار استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۶-۱}{x^۸-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x^۲-۱)(x^۴+x^۲+۱)}{(x^۴-۱)(x^۴+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x^۲-۱)(x^۴+x^۲+۱)}{(x^۲-۱)(x^۲+۱)(x^۴+۱)}=\frac{۱+۱+۱}{(۱+۱)(۱+۱)}=\frac{۳}{۴}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۸ نکته: تابع f را در نقطهٔ $x = c$ پیوسته نامیم، هرگاه:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

ابتدا مقدار تابع را در $x = -۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = a[x]+\frac{۶}{۱-[x]} \Rightarrow f(-۲) = a[-۲]+\frac{۶}{۱-[-۲]} = -۲a+۲$$

اکنون حد راست و چپ تابع را در $x = -۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to -۲^+} f(x) = a(-۲)+\frac{۶}{۱-(-۲)} = -۲a+۲$$

$$\lim_{x\to -۲^-} f(x) = a(-۳)+\frac{۶}{۱-(-۳)} = -۳a+\frac{۳}{۲}$$

با توجه به شرط پیوستگی داریم:

$$-۲a+۲ = -۳a+\frac{۳}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۹ نکته: فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim_{x\to a} g(x)=0$ ، در این صورت:

الف) اگر $L>0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب) اگر $L>0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

پ) اگر $L<0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت) اگر $L<0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ابتدا حد راست تابع را در $x=2$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2[x]-3}{4-x^2}=\frac{2(2)-3}{4-(4^+)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$x\to 2^+ \Rightarrow [x]=2\ ,\ x\to 2^+ \Rightarrow x^2\to 4^+$$

اکنون حد چپ تابع را در $x=2$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2[x]-3}{4-x^2}=\frac{2(1)-3}{4-(4^-)}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$x\to 2^- \Rightarrow [x]=1\ ,\ x\to 2^- \Rightarrow x^2\to 4^-$$

بنابراین $\lim_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ و گزینهٔ ۴ صحیح است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۰ نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k)=\lim_{x\to+\infty}ax^n\ ,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^n$$

با توجه به اینکه $x\to-\infty$ ، بنابراین $|x|=-x$ ، اکنون داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+(x^2+1)^2}{|x|(x^3-2x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+x^4+2x^2+1}{-x^4+2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4}{-x^4}=-2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۱ نکته: فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim_{x\to a} g(x)=0$ ، در این صورت اگر $L<0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ابتدا مقدار $[x]$ را مشخص می‌کنیم و داریم:

$$x\to 1^+ \Rightarrow [x]=1\ ,\ x\to 1^- \Rightarrow [x]=0$$

اکنون حاصل حد راست و حد چپ را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-2}{x-1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x}{(x-1)^2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۲ وقتی $x \to ۲$، تابع با مقادیر کمتر از ۳ به عدد ۳ میل می‌کند، پس داریم:

$$\lim_{x\to ۲}[f(x)] = [۳^-] = ۲$$

همچنین وقتی $x \to -۱^-$، مقدار تابع دقیقاً برابر با ۲− است و داریم:

$$\lim_{x\to -۱^-}[f(x)] = [-۲] = -۲$$

بنابراین، مقدار خواسته‌شده به‌صورت زیر است:

$$۲\lim_{x\to -۱^-}[f(x)] + \lim_{x\to ۲}[f(x)] - \lim_{x\to -۱^+} f(x) = ۲(-۲)+۲-۱ = -۴+۲-۱ = -۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۳ نکته: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $(x-a)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-۳$ برابر ۵ بوده، پس $p(۳)=۵$ و باقی‌ماندهٔ $p(x)$ بر $x+۳$ برابر ۱− است، پس:

$$p(-۳) = -۱$$

برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^۲-۱)+xp(x-۱)$ بر $x+۲$، کافی است در عبارت داده‌شده $x=-۲$ را جای‌گذاری کنیم:

$$p((-۲)^۲-۱)+(-۲)p(-۲-۱) = p(۳)-۲p(-۳) = ۵-۲\times(-۱) = ۷$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۴ نکته: فرض می‌کنیم $\lim_{x\to a} f(x) = L < ۰$ و $\lim_{x\to a} g(x) = ۰$. اگر تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{عدد منفی}}{۰^-} = +\infty$$

اگر $x \to ۳$، تابع با مقادیر کمتر از ۴، به عدد ۴ نزدیک می‌شود؛ پس داریم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{[f(x)]-۴}{f(x)-۴} = \frac{[۴^-]-۴}{۴^- - ۴} = \frac{۳-۴}{۰^-} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۵ نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x\to +\infty}(ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + k) = \lim_{x\to +\infty} ax^n \quad , \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} ax^n$$

ابتدا مقدار a را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{ax^۲-x-۱}}{۲x+۳} = \lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{ax^۲}}{۲x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{|x|\sqrt{a}}{۲x} \overset{|x|=-x}{=\!=} \lim_{x\to -\infty}\frac{-x\sqrt{a}}{۲x} = -\frac{\sqrt{a}}{۲} \Rightarrow -\frac{\sqrt{a}}{۲} = -۴ \Rightarrow a = ۶۴$$

اکنون حاصل حد خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$a=۶۴ \Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{۶۴x}{\sqrt{۴x^۲-۱}-x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{۶۴x}{|۲x|-x} \overset{|x|=x}{=\!=} \lim_{x\to +\infty}\frac{۶۴x}{x} = ۶۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۶ نکته: تابع f را در نقطهٔ $x=c$ پیوسته نامیم، هرگاه:

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$$

نکته: تابع f را در نقطهٔ $x=c$ از طرف راست پیوسته نامیم، هرگاه:

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)$$

نکته: تابع f را در نقطهٔ $x=c$ از طرف چپ پیوسته نامیم، هرگاه:

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=f(c)$$

ابتدا مقدار a را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x\to ۲^- \Rightarrow [x]=۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۱+a\sin\frac{\pi}{۲}=۱+a \\ x\to ۲^+ \Rightarrow [x]=۲ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۲+a\sin\pi=۲ \\ f(۲)=۲ \end{cases}$$

$x=۲$ شرط پیوستگی در: $۱+a=۲ \Rightarrow a=۱ \Rightarrow f(x)=[x]+\sin\frac{\pi[x]}{۲}$

اکنون پیوستگی تابع را در $x=-۱$ بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\to (-۱)^- \Rightarrow [x]=-۲ \Rightarrow \lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x)=-۲+\sin(-\pi)=-۲ \\ x\to (-۱)^+ \Rightarrow [x]=-۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x)=-۱+\sin(-\frac{\pi}{۲})=-۲ \\ f(-۱)=-۲ \end{cases}$$

بنابراین تابع f در $x=-۱$ پیوسته است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۷ حاصل حد هنگامی که $x\to ۲^+$، برابر $-\infty$ شده است، پس عدد ۲ باید ریشهٔ مخرج باشد.

از طرف دیگر عدد ۲ ریشهٔ صورت نیز هست، پس مخرج باید ضریبی از $(x-۲)^۲$ باشد:

$$ax^۲+bx-۴=k(x-۲)^۲=k(x^۲-۴x+۴) \Rightarrow ۴k=-۴ \Rightarrow k=-۱$$

بنابراین:

$$a=-۱\,,\ b=۴ \Rightarrow a+b=۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۸ نکته: در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$، اگر $f(a)=g(a)=0$، نتیجه می‌گیریم که چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x-a)$ بخش‌پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x-a)$، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطهٔ a، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\dots+k)=\lim_{x\to+\infty}ax^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^n$$

با توجه به مقادیر مختلف n، حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $n=1 \Rightarrow f(x)=\frac{x-6x^2+20}{-6x+10} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-6x^2}{-6x}=-\infty$

حالت دوم: $n=2 \Rightarrow f(x)=\frac{-5x^2+20}{x^2-7x+10} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x^2}{x^2}=-5$

حالت سوم: $n>2 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^n}{x^n}=1$

بنابراین فقط در حالت $n=2$، حد تابع f در $-\infty$ برابر -5 است.

اکنون حاصل حد خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{-5x^2+20}{x^2-7x+10}=\lim_{x\to2}\frac{-5(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-5)}=\frac{-5(4)}{-3}=\frac{20}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۹ نکته: تابع f در $x=a$ پیوسته است، هرگاه: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

ابتدا داریم:

$$x\to ۲^- \Rightarrow [x]=۱ \ , \ x\to ۲^+ \Rightarrow [x]=۲$$

اکنون حد چپ، حد راست و مقدار تابع $f(x)=x+a[x]-\mathrm{Cos}^۲\frac{\pi[x]}{۴}$ را در $x=۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=۲+a-\mathrm{Cos}^۲\frac{\pi}{۴}=۲+a-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}+a$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۲+۲a-\mathrm{Cos}^۲\frac{\pi}{۲}=۲+۲a-۰=۲+۲a$$

$$f(۲)=۲+۲a$$

بنابراین با توجه به‌شرط پیوستگی تابع داریم:

$$\frac{۳}{۲}+a=۲+۲a \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

اکنون مقدار $f(۳a)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$a=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow f(x)=x-\frac{۱}{۲}[x]-\mathrm{Cos}^۲\frac{\pi[x]}{۴} \Rightarrow f(۳a)=f(-\frac{۳}{۲})=-\frac{۳}{۲}+۱-\mathrm{Cos}^۲(-\frac{\pi}{۲})=-\frac{۱}{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۰ نکته: تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است، هرگاه:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$$

شرط پیوستگی را برای این تابع در نقطهٔ $x=۲$ می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۲\times ۵+۲a=۲a+۱۰ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۲\times ۴+a=a+۸ \\ f(۲)=۲\times ۵+۲a=۲a+۱۰\end{cases} \Rightarrow ۲a+۱۰=a+۸ \Rightarrow a=-۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۱ **نکته:** تابع $y=[x]$ در نقاطی با طول صحیح ناپیوسته است.

نکته: تابع f روی بازهٔ (a,b) پیوسته است، هرگاه در هر نقطهٔ این بازه پیوسته باشد.

تابع $y=\left[\frac{x}{۲}\right]$ را در نظر می‌گیریم. این تابع در نقاطی که $\frac{x}{۲}$ عددی صحیح باشد، ناپیوسته است؛ زیرا:

$$k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x}{۲}=k \Rightarrow x=۲k$$

در بازهٔ $(۰,۶)$ دو عدد زوج $x=۲$ و $x=۴$ وجود دارند که تابع $y=\left[\frac{x}{۲}\right]$ در آن‌ها ناپیوسته است.

از طرفی طبق فرض سؤال تابع $f(x)=(x^۲+ax+b)\left[\frac{x}{۲}\right]$ در تمام نقاط بازهٔ $(۰,۶)$ پیوسته است، پس باید در $x=۲$ و $x=۴$ نیز پیوسته باشد. یعنی $x=۲$ و $x=۴$، ریشه‌های عبارت $x^۲+ax+b$ هستند و داریم:

$$x^۲+ax+b=(x-۲)(x-۴)=x^۲-۶x+۸ \Rightarrow \begin{cases}a=-۶\\ b=۸\end{cases}$$

بنابراین:

$$f(x)=(x^۲-۶x+۸)\left[\frac{x}{۲}\right] \xrightarrow{۳a+۲b=-۲} f(-۲)=-۲۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۲

$$۲x+۳=۱ \Rightarrow ۲x=-۲ \Rightarrow x=-۱$$

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to -۱} f(۲x+۳)=\lim_{x\to -۱}\frac{۳x^۲+x-۲}{۱-x^۲}$$

$$\text{روش اول / تجزیه} \Rightarrow \lim_{x\to -۱}\frac{(۳x-۲)\cancel{(x+۱)}}{(۱-x)\cancel{(x+۱)}}=\frac{-۵}{۲}$$

$$\text{روش دوم}=HOP \Rightarrow \lim_{x\to -۱}\frac{۶x+۱}{-۲x}=\frac{-۵}{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۳ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ریشهٔ عبارت $۲x+۲$، مقدار $x=-۱$ است. برای آن‌که چندجمله‌ای $(f+g)(x)$ بر $۲x+۲$ بخش‌پذیر باشد، باید $(f+g)(-۱)=۰$ باشد؛ در نتیجه:

$$(f+g)(-۱)=۰ \Rightarrow f(-۱)+g(-۱)=۰ \quad (*)$$

گام دوم: $f(-۱)$ را حساب می‌کنیم.

$$f(-۱)=۵(-۱)^۴+۴(-۱)^۳+۳(-۱)^۲-(-۱)-۲=۵-۴+۳+۱-۲=۳$$

گام سوم: پس باید $g(-۱)=-۳$ باشد تا تساوی $(*)$ برقرار باشد.

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $g(-۱)=(-۱)^۳-۲(-۱)=-۱+۲=۱$ ✗

۲) $g(-۱)=(-۱)^۵+۴(-۱)=-۱-۴=-۵$ ✗

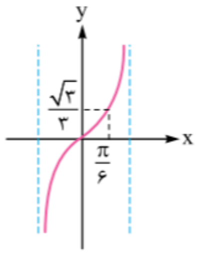
۳) $g(-۱)=(-۱)^۷-۲(-۱)^۲=-۱-۲=-۳$ ✓

۴) $g(-۱)=(-۱)^۲-۱=۰$ ✗

جواب ۳ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۴ **پاسخ تشریحی** **گام اول**: برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۶})^-}[\sqrt{۳}\tan x]=a$، از آن‌جایی که $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۶})^-}\tan x$ برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ می‌شود



و در نتیجه مقدار عبارت داخل جزء صحیح عدد صحیح می‌شود، باید بررسی کنیم که وقتی $x\to(\frac{\pi}{۶})^-$، مقادیر $\tan x$ به سمت $\frac{\sqrt{۳}}{۳}^+$ میل می‌کنند یا $\frac{\sqrt{۳}}{۳}^-$. برای این منظور از نمودار تابع تانژانت کمک می‌گیریم. مطابق نمودار، وقتی x با مقادیر کم‌تر از $\frac{\pi}{۶}$ به آن نزدیک می‌شود، $\tan x$ با مقادیر کم‌تر از $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ به آن نزدیک می‌شود. پس:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۶})^-}[\sqrt{۳}\times\tan x]=[\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}^-]=[۱^-]=۰ \Rightarrow a=۰$$

گام دوم: برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{۲x+۱}{x-۲}]=b$، از قاعدهٔ پرتوان نتیجه می‌گیریم که حد عبارت داخل جزء صحیح در $x\to+\infty$ برابر با عدد صحیح ۲ است. باید بررسی کنیم که عبارت داخل جزء صحیح به سمت ۲^+ میل می‌کند یا ۲^-. برای این منظور از تفکیک کسر داخل جزء صحیح استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}[\frac{۲x+۱}{x-۲}]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{۲x-۴+۴+۱}{x-۲}]=\lim_{x\to+\infty}[\underbrace{\frac{۲x-۴}{x-۲}}_{۲}+\frac{۵}{x-۲}]=\lim_{x\to+\infty}(۲+[\frac{۵}{x-۲}])=۲+[۰^+]=۲ \Rightarrow b=۲$$

پس $a+b=۲$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۵ **پاسخ تشریحی** **گام اول**: حد مخرج کسر وقتی $x\to-۱$ برابر با صفر می‌شود. برای این‌که حاصل حد برابر با عدد ۳ شود باید حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ اتفاق بیفتد و پس از رفع ابهام، حاصل عدد ۳ شود. پس حد صورت کسر نیز در $x\to-۱$ صفر است.

$$(-۱)^۳-a(-۱)-b=۰ \Rightarrow -۱+a-b=۰ \Rightarrow b=a-۱ \quad (۱)$$

راه حل اول:

گام دوم: با جای‌گذاری $b=a-۱$ در حد، آن را رفع ابهام می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-۱}\frac{x^۳-ax-(a-۱)}{x^۲-x-۲}=\lim_{x\to-۱}\frac{\overbrace{x^۳+۱}^{(x+۱)(x^۲-x+۱)}-a(x+۱)}{(x+۱)(x-۲)}=\lim_{x\to-۱}\frac{\cancel{(x+۱)}(x^۲-x+۱-a)}{\cancel{(x+۱)}(x-۲)}=\frac{(-۱)^۲-(-۱)+۱-a}{-۱-۲}=\frac{۳-a}{-۳}$$

گام سوم: حاصل حد را برابر با ۳ قرار می‌دهیم.

$$\frac{۳-a}{-۳}=۳ \Rightarrow ۳-a=-۹ \Rightarrow a=۱۲ \xrightarrow{(۱)} b=۱۲-۱=۱۱$$

در نتیجه $ab=۱۲\times۱۱=۱۳۲$ می‌شود.

راه حل دوم:

گام دوم: از روش هوپیتال برای پیداکردن حاصل حد استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-۱}\frac{x^۳-ax-b}{x^۲-x-۲}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to-۱}\frac{۳x^۲-a}{۲x-۱}=\frac{۳-a}{-۳}=۳ \Rightarrow ۳-a=-۹ \Rightarrow a=۱۲ \xrightarrow{(۱)} b=۱۱ \Rightarrow ab=۱۲\times۱۱=۱۳۲$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۶ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** از آن‌جایی که تابع درجه‌دوم f، محور xها را در دو نقطه به طول‌های $x=-1$ و $x=5$ قطع می‌کند، پس ضابطهٔ آن را می‌توان به صورت $f(x)=k(x+1)(x-5)$ نوشت.

گام دوم: تابع $y=\begin{cases}2^{x-1} & x>3\\ k(x+1)(x-5) & x\le 3\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس در $x=3$ هم پیوسته است، در نتیجه:

$$\lim_{x\to 3^+} y=\lim_{x\to 3^-} y=y(3)\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} 2^{x-1}=\lim_{x\to 3^-} k(x+1)(x-5)\Rightarrow \underbrace{2^{3-1}}_{4}=k(\underbrace{3+1}_{4})(\underbrace{3-5}_{-2})\Rightarrow -8k=4\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$$

پس $y=\begin{cases}2^{x-1} & x>3\\ -\frac{1}{2}(x+1)(x-5) & x\le 3\end{cases}$ است.

گام سوم: خواستهٔ سؤال $y(1)$ است، $x=1$ را در ضابطهٔ پایینی جای‌گذاری می‌کنیم.

$$y(1)=-\frac{1}{2}(1+1)(1-5)=-\frac{1}{2}\times 2\times(-4)=4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۷ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-1$ و $x+2$ بخش‌پذیر است، پس $f(1)=0$ و $f(-2)=0$ می‌شود:

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+1 \begin{cases}\xrightarrow{x=1} f(1)=1+a+b+1=0\\ \xrightarrow{x=-2} f(-2)=-8+4a-2b+1=0\end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases}a=+\frac{1}{2}\\ b=-\frac{5}{2}\end{cases}$$

بنابراین $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+1$ است.

گام دوم: برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x+2a)+f(x+2b)$ بر $x-2$، کافی است به جای x قرار دهیم ۲:

$$\xrightarrow{x=2} f(2+\underbrace{2a}_{1})+f(2+\underbrace{2b}_{-5})=f(3)+f(-3)$$

گام سوم: $f(3)$ و $f(-3)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+1 \begin{cases}\xrightarrow{x=3} f(3)=27+\frac{9}{2}-\frac{15}{2}+1\\ \xrightarrow{x=-3} f(-3)=-27+\frac{9}{2}+\frac{15}{2}+1\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} f(3)+f(-3)=11$$

بنابراین جواب برابر ۱۱ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۸

پاسخ تشریحی **گام اول**: طبق گفتهٔ سؤال، $\lim_{x\to 1}\frac{a-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}=b$ است.

با جای‌گذاری $x=1$ در $\frac{a-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$ به $\frac{a-1}{0}$ می‌رسیم و چون حاصل حد موجود و برابر b است، $a-1$ باید برابر صفر باشد، یعنی $a=1$ می‌شود.

گام دوم: با جای‌گذاری $a=1$ به $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$ می‌رسیم. حاصل حد صفر صفرم است، پس رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=-2$$

گام سوم: حاصل حد برابر -2 است، پس $b=-2$ شده و جواب برابر است با: $ab=1\times(-2)=-2$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۹

پاسخ تشریحی **گام اول**: طبق گفتهٔ سؤال، $\lim_{x\to -\infty}\frac{ax^n-3x+1}{2x^2+x+1}=-0/5$ است؛ پس با توجه به نکته، درجهٔ صورت و مخرج باید با هم برابر باشند. درجهٔ مخرج برابر ۲ است، پس درجهٔ صورت هم باید ۲ باشد که این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که $n=2$ باشد.

گام دوم: با جای‌گذاری $n=2$ و با استفاده از هم‌ارزی پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{ax^2-3x+1}{2x^2+x+1}=-0/5 \Rightarrow \lim_{x\to -\infty}\frac{a\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}}=-0/5 \Rightarrow \frac{a}{2}=-0/5 \Rightarrow a=-1$$

گام سوم: بنابراین جواب برابر $n-a=2-(-1)=3$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۰

پاسخ تشریحی **گام اول**: ابتدا تکلیف جزء صحیح را مشخص می‌کنیم:

$$x\to(\tfrac{1}{2})^+ \Rightarrow x>\frac{1}{2} \Rightarrow 2x>1 \Rightarrow [2x]=1$$

گام دوم: پس حد به صورت زیر می‌شود:

$$\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{x^2-x}{4x^2-[2x]}=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{x^2-x}{4x^2-1}=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{x(x-1)}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{-\frac{1}{4}}{2\underbrace{(2x-1)}_{0^+}}=\frac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۱

پاسخ تشریحی **گام اول**: قدرمطلق را از توابع f و g حذف می‌کنیم:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{x+2|x|}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}=\begin{cases}3 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-|x|}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}=\begin{cases}0 & x>0\\ 0 & x=0\\ 2 & x<0\end{cases}=\begin{cases}0 & x\geq 0\\ 2 & x<0\end{cases}$$

گام دوم: حالا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned}&x>0: g(x)=3 \Rightarrow f(g(x))=f(3)=0\\ &x=0: g(x)=0 \Rightarrow f(g(x))=f(0)=0\\ &x<0: g(x)=-1 \Rightarrow f(g(x))=f(-1)=2\end{aligned} \Rightarrow (fog)(x)=\begin{cases}0 & x\geq 0\\ 2 & x<0\end{cases}$$

تابع fog در $x=0$ ناپیوسته است؛ پس تعداد نقاط ناپیوستگی این تابع، برابر یک است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۲ دامنهٔ تابع f را معین می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۴-x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۴ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲ \\ \text{و} \\ x^۲-۱ \neq ۰ \Rightarrow x^۲ \neq ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = [-۲,-۱) \cup (-۱,۱) \cup (۱,۲]$$

بنابراین تابع f در یک همسایگی نقطهٔ $x=۰$ تعریف شده است و در همسایگی هیچ عدد صحیح دیگری تعریف نشده است.

بنابراین فقط یک عدد صحیح $(x=۰)$ با شرایط مطلوب وجود دارد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۳ اگر $x \to ۳^-$، آن‌گاه $[x]=۲$ و در نتیجه حد مورد نظر به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{x-۲\times۲}{x^۲-x-۶} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{x-۴}{(x-۳)(x+۲)} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۴ توجه کنید که اگر $x \to -\infty$، آن‌گاه $|x-۱| = ۱-x$، بنابراین:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{۲x|x-۱|+x^۲+۱}{x^۲+x-۱} = \lim_{x\to -\infty} \frac{۲x(۱-x)+x^۲+۱}{x^۲+x-۱} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^۲+۲x+۱}{x^۲+x-۱} = \lim_{x\to -\infty} -\frac{x^۲}{x^۲} = -۱$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۵ توجه کنید که $f(x)=mx+۱$، بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۱}{۵+f(x)} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۱}{mx+۶} = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} (mx+۶) = ۰ \Rightarrow ۲m+۶=۰ \Rightarrow m=-۳$$

در نتیجه: $f(x)=-۳x+۱$ و $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(۲x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-۶x+۱}{x} = -۶$.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۶ توجه کنید که: $f(۱)=۲$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} ۲x = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۲-۱}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} (x+۱) = ۲$$

پس $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} f(x) = f(۲)$ و در نتیجه تابع f در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۷ $P(x)$ بر $x^۲-۱$ یعنی بر $x-۱$ و $x+۱$ بخش‌پذیر است. بنابراین:

$$\begin{cases} P(۱)=۰ \\ P(-۱)=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+۱+۲b=۰ \\ a-۱=۰ \Rightarrow a=۱ \Rightarrow b=-۱ \end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to a} \frac{ax+b}{bx+a} = \lim_{x\to ۱} \frac{x-۱}{۱-x} = -۱$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۸ $a \neq ۰$ است، زیرا در این صورت مجموع حد چپ و راست ۷ نمی‌شود.

حد چپ و راست تابع f را در $x = -۲$ محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم به ازای هر مقدار x حاصل $\lim\limits_{x\to -۲} [x]+[-x]$ برابر ۱− است. بنابراین:

$$\lim_{x\to -۲} \frac{ax-[x]}{[x]+[-x]} = \lim_{x\to -۲} [x]-ax \Rightarrow \begin{cases} x \to -۲^{+} : -۲+۲a \\ x \to -۲^{-} : -۳+۲a \end{cases} \Rightarrow ۴a-۵=۷ \Rightarrow a=۳$$

خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱-\sqrt{۱+ax}}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱-\sqrt{۱+۳x}}{x} \times \frac{۱+\sqrt{۱+۳x}}{\underbrace{۱+\sqrt{۱+۳x}}_{۲}} = \lim_{x\to ۰} \frac{-۳x}{۲x} = -\frac{۳}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۹ حاصل حد صورت برابر صفر است و بنابراین حد مخرج نیز در $x = ۱$ باید صفر باشد.

$$\sqrt[۳]{۲+b}-۱=۰ \Rightarrow ۲+b=۱ \Rightarrow b=-۱$$

حاصل حد را رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{a(\sqrt{x}-۱)}{\sqrt[۳]{۲x-۱}-۱} \times \frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱} \times \frac{\overbrace{\sqrt[۳]{(۲x-۱)^۲}+\sqrt[۳]{۲x-۱}+۱}^{۳}}{\sqrt[۳]{(۲x-۱)^۲}+\sqrt[۳]{۲x-۱}+۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{۳a(x-۱)}{۲(۲x-۲)} = \lim_{x\to ۱} \frac{۳a(x-۱)}{۴(x-۱)} = \frac{۳a}{۴}$$

بنابراین:

$$\frac{۳a}{۴} = ۳ \Rightarrow a=۴ \Rightarrow ab=-۴$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۰

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^{+}} \frac{[\sin x]}{۲x-\pi} - \frac{[\pi-۲x]}{\cos x} = \frac{[۱^-]}{۰^+} - \frac{[۰^-]}{۰^-} = \frac{۰}{۰^+} - \frac{-۱}{۰^-} = ۰-\infty = -\infty$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۱ حاصل حد برابر b است، بنابراین حد چپ و راست برابر هستند.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to ۱^+} |۳f(x)-a| &= |۶-a| = |a-۶| \\ \lim_{x\to ۱^-} |۳f(x)-a| &= |-۳-a| = |a+۳| \end{aligned}\right\} \Rightarrow |a+۳|=|a-۶| \Rightarrow \begin{cases} a+۳=a-۶ \Rightarrow ۳=-۶ \quad \text{غقق} \\ a+۳=۶-a \Rightarrow a=\frac{۳}{۲} \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow b=|a+۳| = \left|\frac{۳}{۲}+۳\right| = \frac{۹}{۲} \checkmark$$

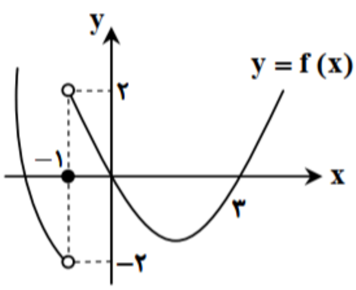
بنابراین:

$$a+b=\frac{۳}{۲}+\frac{۹}{۲}=۶$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۲ **با توجه به نمودار می‌توان فهمید:** $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) = -۲ \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۰$

بنابراین پاسخ برابر است با: $۰+(-۲)=-۲$



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۳ نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$، داریم:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\ell\pm m \quad , \quad \lim_{x\to a}(f(x)\times g(x))=\ell\times m \quad , \quad \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\ell}{m}\quad (m\neq ۰) \quad , \quad \lim_{x\to a} cf(x)=c\ell$$

فرض کنیم $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=\ell$، مطابق قضایای حد، $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۲f(x)+۵}{۴-f(x)}$ برابر $\frac{۲\ell+۵}{۴-\ell}$ است، پس داریم:

$$\frac{۲\ell+۵}{۴-\ell}=-۷ \Rightarrow ۲\ell+۵=۷\ell-۲۸ \Rightarrow ۵\ell=۳۳ \Rightarrow \ell=\frac{۳۳}{۵} \Rightarrow \ell=۶/۶$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۴ برای آن‌که تابع موردنظر در $x=-۱$ حد داشته باشد، باید مقادیر حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر یکدیگر باشند. پس:

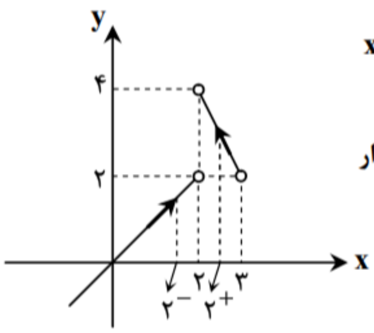
$$\lim_{x\to -۱^+} f(x)=\lim_{x\to -۱^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to -۱^+}\left(a[x]+\frac{|x+۱|}{x+۱}\right)=\lim_{x\to -۱^-}\left(a[x]+\frac{|x+۱|}{x+۱}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -۱^+}\left(a(-۱)+\frac{x+۱}{x+۱}\right)=\lim_{x\to -۱^-}\left(a(-۲)+\frac{-(x+۱)}{x+۱}\right) \Rightarrow -a+۱=-۲a-۱ \Rightarrow a=-۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۵ برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to ۲^-}[f(x)]$، داریم:

$$x\to ۲^- \Rightarrow f(x)\to ۲^- \Rightarrow \lim_{x\to ۲^-}[f(x)]=\lim_{x\to ۲^-}[۲^-]=۱$$



برای محاسبهٔ $\left[\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)\right]$، ابتدا حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ را به‌دست می‌آوریم و سپس مقدار جزء صحیح آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۴ \Rightarrow \left[\lim_{x\to ۲^+} f(x)\right]=[۴]=۴$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۶ فرض می‌کنیم $g(x)=۲f(۲x-۵)$ است. برای پیداکردن باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $g(x)$ بر $x-۲$، باید $g(۲)$ را به‌دست آوریم؛ بنابراین:

$$r=g(۲) \Rightarrow r=۲f(۴-۵)=۲f(-۱) \quad (*)$$

حال داریم:

$$f(x)=۳x^۳-۶x^۲-۳x-۱ \Rightarrow f(-۱)=-۳-۶+۳-۱=-۷$$

بنابراین:

$$(*) \Rightarrow r=-۱۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۷ باتوجه‌به اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\lim_{x\to ۸}\frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{x-۸}=\lim_{x\to ۸}\left(\frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{x-۸}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}\right)=\lim_{x\to ۸}\frac{x-۸}{(x-۸)(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)}=\frac{۱}{۱۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۸

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ ۱: در همسایگی راست عدد ۱، $[x]=۱$، پس تابع $y=\frac{۱}{[x]-۱}$ در همسایگی راست ۱ تعریف‌نشده است و حد (متناهی یا نامتناهی) ندارد.

گزینهٔ ۲: در همسایگی راست عدد ۱، $[x]=۱$، پس $[x]-۱=۰$ و در نتیجه صورت کسر عدد صفر و حاصل حد برابر صفر است و حاصل حد متناهی است.

گزینهٔ ۳: مقدار تابع $y=\sqrt{x}-۱$ وقتی $x\to ۱^-$، به‌سمت صفر میل می‌کند، پس حد تابع $y=\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}$ وقتی $x\to ۱^-$ نامتناهی است.

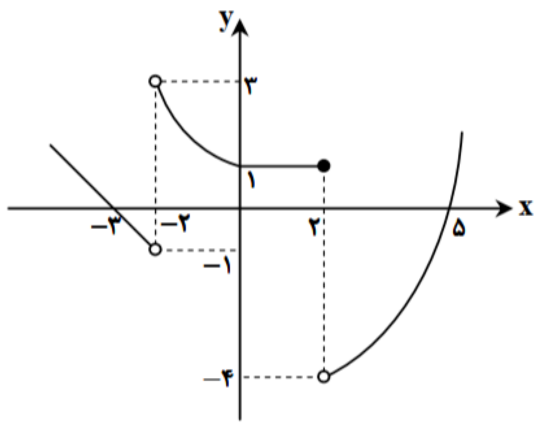
گزینهٔ ۴: تابع $y=\sqrt{x-۱}$ در همسایگی چپ عدد ۱ تعریف‌نشده است (زیرا عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود)، پس تابع $y=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$ در $x=۱$ حد چپ (متناهی یا نامتناهی) ندارد.

بنابراین تنها در گزینهٔ ۳ حد تابع نامتناهی است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۹

نکته: اگر n عددی صحیح باشد، داریم: $\lim\limits_{x\to n^-}[x]=n-۱$ ، $\lim\limits_{x\to n^+}[x]=n$



با توجه به نمودار تابع و نکتهٔ بالا داریم:

$$\lim_{x\to(-۲)^+}[f(x)]-۲\lim_{x\to ۲^-}f(x)+\lim_{x\to ۲^+}[f(x)]$$
$$=[۳^-]-۲\times ۱+[(-۴)^+]=۲-۲+(-۴)=-۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۰

نکته: باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر با $f(-\frac{b}{a})$ است.

چون چندجمله‌ای $f(x)=kx^۳-x^۲+۳$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر است، داریم:

$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow f(-۱)=۰ \Rightarrow -k-۱+۳=۰ \Rightarrow k=۲ \Rightarrow f(x)=۲x^۳-x^۲+۳$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x+۱)$ بر $x-۱$ را می‌یابیم:

$$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow \text{باقی‌مانده}=f(۱+۱)=f(۲)=۲\times ۲^۳-۲^۲+۳=۱۶-۴+۳=۱۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۱ نکته: فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = ۰$، در این صورت:

الف) اگر $L > ۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

ب) اگر $L > ۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

پ) اگر $L < ۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

ت) اگر $L < ۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

با توجه به نمودار $f(۱) = -۱$ و برای xهای اطراف $x = ۱$، $f(x) > -۱$؛ لذا: $f(x) + ۱ > ۰$

پس داریم:

$$\lim_{x\to ۱} g(x) = \lim_{x\to ۱} \frac{-۱}{f(x)+۱} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۲ ابتدا کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۳-۷x-۶}{\sqrt{x+۱}-۲} = \frac{۰}{۰} \to \lim_{x\to ۳} \frac{x^۳-۷x-۶}{\sqrt{x+۱}-۲} \times \frac{\sqrt{x+۱}+۲}{\sqrt{x+۱}+۲} = \lim_{x\to ۳} \frac{۴(x^۳-۷x-۶)}{x-۳}$$

عامل ابهام $x-۳$ است پس عبارت صورت را بر $x-۳$ تقسیم می‌کنیم:

$$x^۳-۷x-۶ = (x-۳)(x^۲+۳x+۲) \quad \lim_{x\to ۳} \frac{۴(x^۳-۷x-۶)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{۴(x-۳)(x^۲+۳x+۲)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳} ۴(x^۲+۳x+۲) = ۸۰$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵۳

$$x = -۱ \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x) = f(-۱) \\ ۳(-۱) = a\times(-۱) - b \\ -a-b = -۳ \to a+b = ۳\,(I) \end{cases} \qquad x = ۲ \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = f(۲) \\ a\times ۲ - b = ۲^۲ - ۱ \\ ۲a - b = ۳\,(II) \end{cases} \qquad \xrightarrow[\text{دستگاه}]{(I),(II)} a = ۲, b = ۱ \Rightarrow \frac{a}{b} = ۲$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵۴

$$p(۲x-۱) = (x+۲)Q(x) - ۳ \xrightarrow{x=-۲} p(-۵) = -۳$$

$$p(۲x+۱) = (x-۲)Q'(x) + ۱ \xrightarrow{x=۲} p(۵) = ۱$$

$$p(x+۴) - ۲p(-x-۴) = (x-۱)Q''(x) + R$$

$$\xrightarrow{x=۱} p(۵) - ۲p(-۵) = R \to ۱ - ۲(-۳) = R \to ۷ = R$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵۵

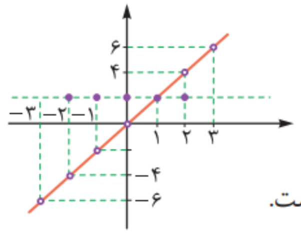
$$\lim_{x\to ۱} \frac{x-۱}{\sqrt[۴]{x}-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}{\sqrt[۴]{x}-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{\cancel{(\sqrt[۴]{x}-۱)}(\sqrt[۴]{x}+۱)(\sqrt{x}+۱)}{\cancel{\sqrt[۴]{x}-۱}} = ۲\times ۲ = ۴$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵۶ پاسخ تشریحی **گام اول**: ضابطهٔ داده‌شده را اگر بخواهیم ساده‌تر بنویسیم، به شکل زیر خواهد شد:

$$f(x)=\begin{cases}2x & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\\ 2 & x\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}2x & x\notin\mathbb{Z}\\ 2 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

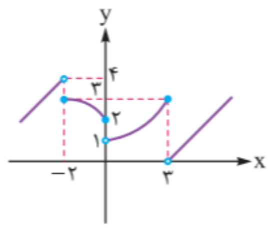
گام دوم: حال تابع f را در بازهٔ $(-3,3)$ رسم می‌کنیم، در xهای صحیح نمودار $y=2x$ باید تو خالی باشد، هم‌چنین در xهای صحیح، مقدار تابع برابر ۲ است.



با دقت به نمودار به‌دست‌آمده، مشخص است که تابع در تمام نقاط این بازه دارای حد است، پس ۴ صحیح است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۷ پاسخ تشریحی **گام اول**: ابتدا با توجه به $x\to(-2)^+$ و نمودار، $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(4-x^2)$ را به دست می‌آوریم:



$$x\to(-2)^+ \Rightarrow x^2\to 4^- \Rightarrow \overbrace{(4-x^2)}^{4-4^-}\to 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to(-2)^+} f(4-x^2)=\lim_{t\to 0^+}f(t)=1$$

گام دوم: حال به سراغ محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 3^+}f(3-x)$ می‌رویم:

$$x\to 3^+ \Rightarrow \overbrace{3-x}^{3-(3^+)}\to 0^- \Rightarrow \lim_{x\to 3^+}f(3-x)=\lim_{t\to 0^-}f(t)=2$$

گام سوم: با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده، خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(4-x^2)+\lim_{x\to 3^+} f(3-x)=1+2=3$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۸ پاسخ تشریحی **گام اول**: با قراردادن $x=\sqrt{2}$، مقدار حد مورد نظر $\frac{0}{0}$ می‌شود، سپس باید آن را رفع ابهام کنیم.

گام دوم: برای رفع ابهام، ابتدا تکلیف جزء صحیح موجود در حد را مشخص می‌کنیم:

$$x\to\sqrt{2}^+ \Rightarrow x+1\to\sqrt{2}^+ +1 \Rightarrow [\sqrt{\sqrt{2}^+ +1}]=[1/\cdots]=1$$

این‌جوری هم ببین:

$$\sqrt{2}\simeq 1/4 \Rightarrow [\sqrt{1/4+1}]=1$$

گام سوم: حال به سراغ قدرمطلق موجود می‌رویم:

$$x\to\sqrt{2}^+ \Rightarrow x^2\to 2^+ \Rightarrow \overbrace{2-x^2}^{2-2^+}\to 0^- \Rightarrow |2-x^2|=x^2-2$$

گام چهارم: با توجه به نکتهٔ گفته‌شده، به جای براکت، مقدار به‌دست‌آمده و به جای قدرمطلق، عبارت به‌دست‌آمده را در حد خواسته‌شده جای‌گذاری می‌کنیم و با توجه به اتحاد مزدوج حد را رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(\sqrt{2})^+}\frac{x[\sqrt{x+1}]-\sqrt{2}}{|2-x^2|}=\lim_{x\to(\sqrt{2})^+}\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}=\lim_{x\to(\sqrt{2})^+}\frac{\cancel{x-\sqrt{2}}}{(\cancel{x-\sqrt{2}})(x+\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

با گویاکردن مخرج، خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۹ **پاسخ تشریحی** **گام اول**: می‌خواهیم تابع f در $x=0$ پیوسته باشد؛ پس مقدار تابع f در این نقطه باید با حد چپ و حد راست تابع در $x=0$ برابر باشد، به عبارت دیگر باید:

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

ابتدا $f(0)$ را از روی ضابطهٔ دوم پیدا می‌کنیم:

$$f(0)=a-3$$

گام دوم: حد چپ و راست در $x=0$ را به ترتیب با توجه به ضابطه‌های اول و دوم محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x[x]}{|x|}\xrightarrow[{[0^-]=-1,\,|x|=-x}]{x\to 0^-}\lim_{x\to 0^-} f(x)=\frac{x(-1)}{-x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}{\cancel{1-\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}(1+\cos x)=1+1=2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

گام سوم: همان‌طور که دیدید حد چپ و حد راست تابع در $x=0$ با یکدیگر برابر نیستند؛ پس مقداری برای a نمی‌توان یافت تا تابع در $x=0$ پیوسته باشد، بنابراین $\boxed{۴}$ درست است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۰ **پاسخ تشریحی** **گام اول**: تابع f در $(3,4)$ پیوسته است، برای این‌که تابع f در بازهٔ $[3,4]$ پیوسته باشد، باید در $x=3$ پیوستگی راست و در $x=4$ پیوستگی چپ داشته باشد. برای این‌که تابع در $x=3$ از راست پیوسته باشد، باید مقدار تابع و حد راست آن در $x=3$ با هم برابر باشند:

$$\left.\begin{aligned}&f(3)=a\\&\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(x-1)[x]=(3-1)[3^+]=2\times 3=6\end{aligned}\right\}\Rightarrow a=6$$

گام دوم: تابع باید در $x=4$ از چپ پیوسته باشد، پس $f(4)$ و حد چپ تابع f در $x=4$ را مساوی هم قرار می‌دهیم.

$$\left.\begin{aligned}&f(4)=b\\&\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}(x-1)[x]=(4-1)[4^-]=3\times 3=9\end{aligned}\right\}\Rightarrow b=9$$

خواستهٔ سؤال $b+a$ است که برابر می‌شود با:

$$b+a=9+6=15$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۱ **گام اول**: عبارت $x+2$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x+2=0\Rightarrow x=-2$$

گام دوم: ریشهٔ به‌دست‌آمده را در چندجمله‌ای $2x^3+5x^2-3x-15$ جای‌گذاری می‌کنیم تا باقی‌ماندهٔ تقسیم پیدا شود:

$$2(-2)^3+5(-2)^2-3(-2)-15=-16+20+6-15=-5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۲ **گام اول:** صورت و مخرج کسر را در سه‌جمله‌ای اتحاد چاق و لاغر مربوط به مخرج کسر ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{(\sqrt[۳]{x}-۱)(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}$$

گام دوم: مخرج کسر را به کمک اتحاد چاق و لاغر ساده کرده و حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{\cancel{x-۱}}=۱+۱+۱=۳$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۳ **گام اول:** در محاسبهٔ حدهای شامل جزء صحیح، ابتدا باید مقدار جزء صحیح را پیدا کرده و در حد جای‌گذاری کنیم:

$$[۳^+]=۳$$

گام دوم: حد داده‌شده به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{۳-۳}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۰}{x-۳}=۰$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۴ **گام اول**: مخرج یک عبارت درجه‌دوم است و حاصل حد وقتی $x \to b$، برابر $+\infty$ شده است، پس مخرج دارای ریشهٔ مضاعف $x=b$ است، چون ضریب $x^۲$ برابر a است به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$ax^۲-۴x+\frac{a}{۴}=a\underbrace{(x-b)^۲}_{x^۲-۲bx+b^۲} \Rightarrow ax^۲-۴x+\frac{a}{۴}=ax^۲-۲abx+ab^۲$$

گام دوم: عبارت‌های متشابه در تساوی به‌دست‌آمده را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$ax^۲\underline{-۴x}+\underline{\underline{\frac{a}{۴}}}=ax^۲\underline{-۲abx}+\underline{\underline{ab^۲}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\cancel{a}}{۴}=\cancel{a}b^۲ \xrightarrow{a\neq ۰} \frac{۱}{۴}=b^۲ \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{۱}{۲} \\ b=-\frac{۱}{۲} \end{cases} \\ \overset{۲}{\cancel{-۴}}=\cancel{-۲}ab \begin{cases} \xrightarrow{b=\frac{۱}{۲}} ۲=\frac{۱}{۲}a \Rightarrow a=۴ \\ \xrightarrow{b=-\frac{۱}{۲}} ۲=-\frac{۱}{۲}a \Rightarrow a=-۴ \end{cases} \end{cases}$$

گام‌سوم: حاصل حد $\lim\limits_{x\to b}\frac{bx-۲}{ax^۲-۴x+\frac{a}{۴}}$ را یک‌بار به‌ازای $a=۴$ و $b=\frac{۱}{۲}$ یک‌بار به‌ازای $a=-۴$ و $b=-\frac{۱}{۲}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to b}\frac{bx-۲}{ax^۲-۴x+\frac{a}{۴}}=\lim_{x\to b}\frac{bx-۲}{a(x-b)^۲}\begin{cases} \xrightarrow{b=\frac{۱}{۲},a=۴} \lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{\frac{۱}{۲}x-۲}{۴(x-\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{\frac{۱}{۴}-۲}{۴(۰^+)}=\frac{\text{عدد منفی}}{۰^+}=-\infty \\ \xrightarrow{b=-\frac{۱}{۲},a=-۴} \lim\limits_{x\to-\frac{۱}{۲}}\frac{-\frac{۱}{۲}x-۲}{-۴(x+\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{\frac{۱}{۴}-۲}{-۴(۰^+)}=\frac{\text{عدد منفی}}{۰^-}=+\infty \end{cases}$$

حاصل حد به ازای $a=۴$ و $b=\frac{۱}{۲}$ مساوی $-\infty$ و به ازای $a=-۴$ و $b=-\frac{۱}{۲}$ مساوی $+\infty$ می‌شود، پس $a+b=۴/۵$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۵ **گام اول**: ابتدا باید به دست آوریم که در یک همسایگی راست $x=-۱$ عبارت $[-x]$ برابر چه عددی است:

$$x \to (-۱)^+ ; x>-۱ \Rightarrow -x<۱ \Rightarrow [-x]=۰$$

گام دوم: پس داریم:

$$\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x^۲-[-x]}{۱+x}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x^۲}{۱+x}=\frac{\text{عدد مثبت}}{۰^+}=+\infty$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۶ با توجه به تعاریف ساده و اولیهٔ حد در بی‌نهایت، درستی گزینه‌های (۱) و (۲) مشخص است.

اما دقت کنید وقتی $x \to +\infty$، تابع f از مقادیر کم‌تر از ۱ به آن نزدیک می‌شود، بنابراین حداقل مقداری مثل α پیدا می‌شود که تابع $[f]$ در بازهٔ $(\alpha,+\infty)$ مساوی تابع ثابت صفر است، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=[۱^-]=۰\neq۱$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۷ فقط کافی است ضابطه‌های $f(x)$ و $f(x^۳)$ را جای‌گذاری کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)-۱}{۲-۳f(x^۳)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{۱}{x}-۱}{۲-\frac{۳}{x^۳}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{۱-x}{x}}{\frac{۲x^۳-۳}{x^۳}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲(۱-x)}{۲x^۳-۳}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^۳+x^۲}{۲x^۳-۳}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^۳}{۲x^۳}=-\frac{۱}{۲}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۸ نمودار سهمی در همسایگی $x=۱$ به صورت زیر است:

پس در یک همسایگی $x=۱$، مقادیر $f(x)$ کمتر از ۱ است و داریم:

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{x+۱}{f^۲(x)-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x+۱}{(f(x)+۱)(f(x)-۱)}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲}{۲(f(x)-۱)}=\frac{۲}{۰^-}=-\infty$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶۹ حد هرکدام از گزینه‌ها را حساب و بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{[-۲x]+۱}{x^۳(۱-x^۴)}=\frac{[(-۲)^-]+۱}{۱(۱-۱^+)}=\frac{-۲}{۰^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{[-۲x]+۱}{x^۳(۱-x^۴)}=\frac{[۲^+]+۱}{-۱(۱-۱^+)}=\frac{۳}{۰^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{[-۲x]+۱}{x^۳(۱-x^۴)}=\frac{[۰^+]+۱}{۰^-(۱-۰^+)}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{[-۲x]+۱}{x^۳(۱-x^۴)}=\frac{[۰^-]+۱}{۰^+(۱-۰^+)}=\frac{\text{صفر مطلق}}{۰^+}=\text{صفر}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۷۰

$$\left.\begin{array}{l} f=x+۳ \\ g=\frac{-۱}{۲}x+۱ \end{array}\right\}\Rightarrow ۲(f+g)=۲(x+۳-\frac{۱}{۲}x+۱)=۲(\frac{x}{۲}+۴)\quad =x+۸$$

$$f.g=(x+۳)(\frac{-۱}{۲}x+۱)\Rightarrow\frac{(x+۸)-۵}{(x+۳)(\frac{-۱}{۲}x+۱)}=\frac{x+۳}{(x+۳)(\frac{-۱}{۲}x+۱)}=\frac{۱}{\frac{-۱}{۲}x+۱}\qquad\lim_{x\to-۳}(\frac{۱}{\frac{-۱}{۲}x+۱})=\frac{۱}{\frac{۳}{۲}+۱}=\frac{۲}{۵}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۷۱ طبق صورت سؤال $P(۲)=۳$ است، پس $P(۲)=۸-۸+۲a-۱=۳$ و داریم: $\Rightarrow a=۲$

$$R=f(۳)=۲P(۲)-۳P(۳)$$

$$=۲(۳)-۳(۲۷-۱۸+۶-۱)=۶-۳(۱۴)=-۳۶$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۷۲ $f(-۲)=\lim_{x\to-۲}f(x)\Rightarrow k+۲-۲=|-۲-۲|\Rightarrow k=۴$

$f(۲)=\lim_{x\to ۲}f(x)\Rightarrow k-۲+۲=|۲-(-۲)|\Rightarrow k=۴$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۷۳ باید $(2x-14, 3x+8) \in 2$ باشد؛ بنابراین:

$$\begin{cases} 2x-14<2 \Rightarrow 2x<16 \Rightarrow x<8 \\ 3x+8>2 \Rightarrow 3x>-6 \Rightarrow x>-2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x\in(-2,8)$$

پس به‌ازای ۹ مقدار صحیح $x=-1,0,1,2,\dots,7$، بازهٔ داده‌شده یک همسایگی برای $x_0 = 2$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۴ ابتدا تابع $f(x)-g(x)$ را تشکیل داده و ضابطهٔ آن را ساده می‌کنیم:

$$f(x)-g(x)=\frac{x^2+5}{x-1}-\frac{2x^2+1}{2x+3}=\frac{(x^2+5)(2x+3)-(x-1)(2x^2+1)}{(x-1)(2x+3)}$$

$$=\frac{(2x^3+3x^2+10x+15)-(2x^3-2x^2+x-1)}{2x^2-2x+3x-3}=\frac{5x^2+9x+16}{2x^2+x-3}$$

اکنون مقدار حد موردنظر را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+9x+16}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{2x^2}=\frac{5}{2}=2/5$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۵ توجه کنید که:

$$x^3-3x+2=x^3-1-3(x-1)=(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)=(x-1)(x^2+x-2)$$

$$=(x-1)(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2)$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}(x+2)=3$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۶

$$\lim_{x\to9}\frac{x-3\sqrt{x}}{x^2-8x-9}=\lim_{x\to9}\frac{x^2-9x}{x^2-8x-9}\times\frac{1}{x+3\sqrt{x}}=\lim_{x\to9}\frac{x(x-9)}{(x+1)(x-9)}\times\frac{1}{x+3\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{x}{x+1}\times\frac{1}{x+3\sqrt{x}}=\frac{9}{10}\times\frac{1}{18}=\frac{1}{20}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۷ توجه کنید که:

$$(2x-1)^3-8(x+1)^3=\cancel{8x^3}-12x^2+6x-1-\cancel{8x^3}-24x^2-24x-8=-36x^2-18x-9$$

$$2(x-1)^2+(2x+1)^2=2x^2-4x+2+4x^2+4x+1=6x^2+3$$

بنابراین حد مورد نظر به صورت مقابل است:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-36x^2-18x-9}{6x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-36x^2}{6x^2}=-6$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۸ توجه کنید که:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-1}{2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x}=2$$

از طرف دیگر:

$$f(x)=\frac{4x-1}{2x+3}=\frac{4x+6-7}{2x+3}=\frac{4x+6}{2x+3}-\frac{7}{2x+3}=2-\frac{7}{2x+3}$$

پس اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $-\frac{7}{2x-3}\to0^-$، بنابراین:

$$f(x)\to2^-\Rightarrow[f(x)]=1$$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=1$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۹ توجه کنید که: $f(\frac{\pi}{۶}) = ۲$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^+} ۲\sin x = ۲\sin\frac{\pi}{۶} = ۲\times\frac{۱}{۲} = ۱ \neq f(\frac{\pi}{۶})$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^-} ۲\cos ۲x = ۲\cos\frac{\pi}{۳} = ۲\times\frac{۱}{۲} = ۱ \neq f(\frac{\pi}{۶})$$

بنابراین تابع f در $x = \frac{\pi}{۶}$ نه پیوستگی راست دارد و نه چپ.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۸۰ می‌دانیم وقتی $x \to k \in \mathbb{Z}$، مقدار x صحیح نیست، پس $[-x] = -[x] - ۱$ پس در اعداد غیرصحیح

$$f(x) = \frac{-[x]-۱}{[x]+۱} = -۱$$

یعنی f همواره حد دارد و $\lim_{x\to k} f(x) = -۱$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)